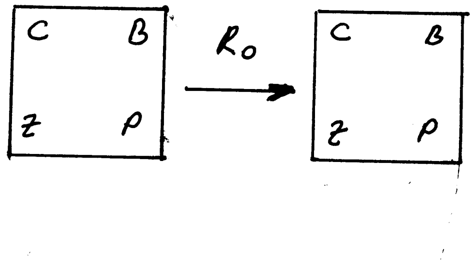
Neke familije grupa i podgrupe

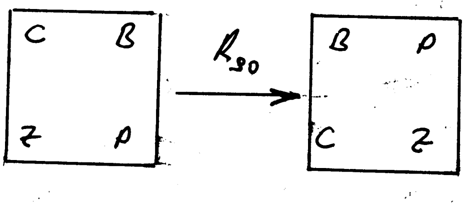
(#) Pretpostavimo da smo uklonili neki kvadratni dio ravni, da smo ga pomjerali na različite načine, i da ga sada želimo vratiti na isto mjesto na kojem je bio ranije. Opišite sve moguće načine na koje je ovo moguće uraditi. Tačnije, opišite sve moguće relacije između početne pozicije kvadrata i njegove završne pozicije u terminima kretanja (štaviše zanima nas rezultat pomjeranja, prije nego samo pomjeranje – time, npr. rotaciju od 90° i rotaciju od 450° posmatramo kao jednake, s obzirom da imaju isti rezultat na svakoj tački).

Rj.: Za početak možemo razmišljati kao da je kvadratni dio providan (recimo staklo), čiji su ćoškovi označeni bojama crvena, zelena, plava i bijela. Ove oznake će nam pomoći da razlikujemo pokrete koji imaju različite efekte. Sa ovim oznakama sada možemo na jednostavan način opisati sve moguće načine u koje kvadrat možemo repozicionirati

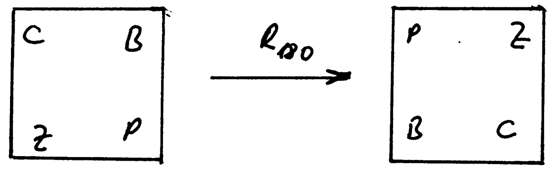
R_0 = rotacija za 0°
(nema promjene u poziciji)



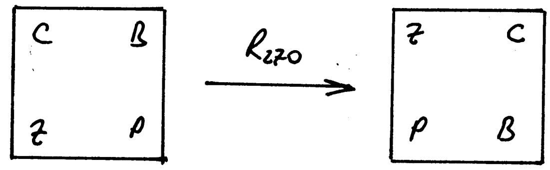
R_{90} = rotacija za 90°
(suprotno smjeru kazaljke na satu)



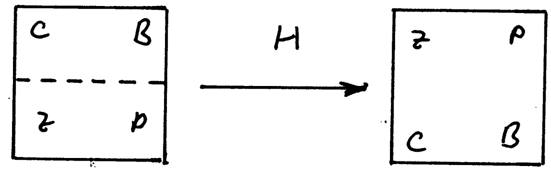
R_{180} = rotacija za 180°



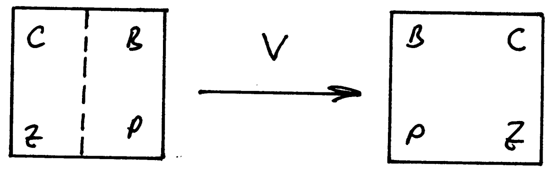
R_{270} = rotacija za 270°



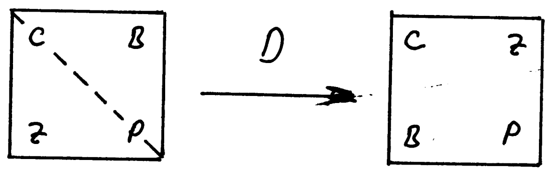
H = okret oko horizontalne ose



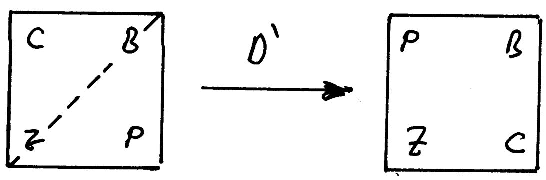
V = okret oko vertikalne ose



D = okret oko glavne dijagonale



D' = okret oko druge dijagonale



Sad tvrdimo da bilo koje pomjeranje – nije bitno koliko komplikovano – je ekvivalentno sa ovih 8. Da dokažemo ovu tvrdnju, primjetimo da je finalna pozicija kvadrata potpuno određena lokacijom i orjentacijom (tj. lice gore ili lice dole) bilo kojeg ćoška. Ali jasno, postoje samo četri lokacije i dvije orjentacije za dati ćošak, pa time postoji tačno osam različitih finalnih pozicija za ćoškove.

Definicija (simetrija geometriske figure)

Simetrija geometriske figure je preuređenje elemenata figure na takav način da se očuvaju sve strane i vrhovi figure, njihova međusobna veza kao i da se očuvaju sve udaljenosti i uglovi.

(#) Dat je skup $D_4 = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D \text{ i } D'\}$ gdje osam elemenata skupa predstavlja osam simetrija kvadrata koje smo dobili u jednom od prethodnih zadataka i data je Cayley-eva tabela od D_4 u odnosu na operaciju kompozicije

	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}	H	V	D	D'
R_0	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}	H	V	D	D'
R_{90}	R_{90}	R_{180}	R_{270}	R_0	D'	D	H	V
R_{180}	R_{180}	R_{270}	R_0	R_{90}	V	H	D'	D
R_{270}	R_{270}	R_0	R_{90}	R_{180}	D	D'	V	H
H	H	D	V	D'	R_0	R_{180}	R_{90}	R_{270}
V	V	D'	H	D	R_{180}	R_0	R_{270}	R_{90}
D	D	V	D'	H	R_{270}	R_{90}	R_0	R_{180}
D'	D'	H	D	V	R_{90}	R_{270}	R_{180}	R_0

(i) Da li je skup D_4 zatvoren u odnosu na operaciju kompozicije.

(ii) Da li postoji jedinični element

(iii) Da li svaki element ima inverz

(iv) Da li se svaki element od D_4 u tabeli pojavljuje tačno jednom u svakom redu i svakoj koloni

(v) Da li je D_4 grupa u odnosu na operaciju kompozicije. Da li je grupa Abelova.

Rj.

(i) Jest skup je zatvorena. Primjetimo da u tabeli nemamo ni jedan novi element.

(ii) Primjetimo da za $\forall S \in D_4$ $R_0 S = S$ i $S R_0 = S$

R_0 je jedinični element

(iii) R_0 se pojavljuje u svakoj vrsti i svakoj koloni tačno jednom. Svaki element ima inverz.

(iv) Da laganom provjerom vidimo da se svaki element pojavljuje tačno jednom u svakoj vrsti i u svakoj koloni.

(v) Već smo pokazali da je skup zatvoren, da ima jedinični element i da svaki element ima inverz.

Kako znamo od ranije da je operacija kompozicije asocijativna to je D_4 grupa.

Primjetimo da je npr.
$$\left.\begin{array}{l} HR_{90} = D \\ \text{i} \quad R_{90}H = D' \end{array}\right\} \Rightarrow HR_{90} \neq R_{90}H.$$

Grupa nije abelova.

Napomena

Osam simetrija kvadrata R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D i D' zajedno sa operacijom kompozicije, formiraju matematički sistem koji nazivamo dihedralna grupa reda 8 (red grupe je broj elemenata koje grupa sadrži). Ovu grupu označavamo sa D_4.

Oznake

Ako je data multiplikativna grupa G i ako je $g \in G$ tada

$g \cdot g$ označavamo sa g^2

$g \cdot g \cdot g$ označavamo sa g^3

$\vdots$

$\underbrace{gg \cdots g}_{n \text{ faktora}}$ označavamo sa g^n

Sljedeća tabela pokazuje razliku između multiplikativne i aditivne grupe

Multiplikativna grupa		Additivna grupa	
$a \cdot b$ ili ab	množenje	$a+b$	sabiranje
e ili 1	identitet ili jedinica	0	nula
a^{-1}	multiplikativni inverz od a	$-a$	aditivni inverz
a^n	stepen od a	na	višekratnik od a
ab^{-1}	količnik	$a-b$	razlika

Definicija (red)

Red $|G|$ grupe G definišemo kao broj elemenata u grupi G.

Definicija (red elementa)

Neka je G grupa i $a \in G$. Ako postoji prirodan broj n takav da je $a^n = e$ (e jedinični element u G) tada najmanji takav n nazivamo red elementa a. Ako takav broj ne postoji tada kažemo da je a beskonačnog reda. Oznake: $\text{ord}(a)$ ili $\text{red}(a)$ ili $|a|$.

(#) Data je grupa D_4 (dihedralna grupa simetrija kvadrata - vidi jedan od prethodnih zadataka). Odrediti red grupe te odrediti red elemenata R_0, R_{90} i H.

Rj.: $D_4 = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D, D'\}$

red grupe D_4 je 8.

R_0 je jedinični element, $R_0 R_0 = R_0$

red elementa R_0 je 1.

$H \cdot H = H^2 = R_0$

red elementa H je 2.

$R_{90} \cdot R_{90} = R_{90}^2 = R_{180}$

$R_{90}^3 = R_{90}^2 \cdot R_{90} = R_{180} R_{90} = R_{270}$

$R_{90}^4 = R_{90}^3 \cdot R_{90} = R_{270} \cdot R_0 = R_0$

red elementa R_{90} je 4.

(#) Neka je G grupa i neka je $g \in G$ konačnog reda. Pokazati da tada postoji pozitivni cijeli k takav da je $g^{-1} = g^k$.

Rj.

g je konačnog reda $\Rightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}$ t.d. $g^n = e$

Odavde imamo $\left.\begin{array}{l} g^{n-1} \cdot g = e \\ g \cdot g^{n-1} = e \end{array}\right\} \Rightarrow g^{-1} = g^{n-1}$.

Algoritam djeljenja

Za dati cijeli $m \in \mathbb{Z}$ i za pozitivni cijeli $n \in \mathbb{Z}^+$ postoji jedinstven $q \in \mathbb{Z}$ (količnik) i $r \in \mathbb{Z}^+$ (ostatak) takvi da

$$m = nq + r \quad \text{i}$$

$$r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Definicija (sabiranje i množenje modulo n)

Neka je $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ (gdje je $n \geq 1$ fiksiran cijeli).
Na skupu $\mathbb{Z}_n$ definišemo operaciju sabiranje modulo n na sljedeći način

$$+_n : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$$
$$(a, b) \longrightarrow a+b \pmod n$$

gdje broj $a+b \pmod n$ predstavlja ostatak kada zbir $a+b$ podjelimo sa n. Često ćemo umjesto $+_n$ pisati samo $+$.

Slično, na skupu $\mathbb{Z}_n$ definišemo operaciju množenja modulo n na sljedeći način

$$\cdot_n : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$$
$$(a, b) \longrightarrow ab \pmod n$$

gdje broj $ab \pmod n$ predstavlja ostatak kada proizvod ab podjelimo sa n. Često ćemo umjesto $\cdot_n$ pisati samo $\cdot$.

#. Definišimo skup $U(10)$ kao skup svih pozitivnih cijelih brojeva manjih od 10, koji su relativno prosti sa 10. Drugim riječima

$$U(10) = \{ k \in \mathbb{N} \mid k < 10, \ NZD(k, 10) = 1 \}$$

Napraviti Cayley-evu tabelu za $U(10)$ u odnosu na operaciju množenja modulo 10.

Rj.

$U(10) = \{1, 3, 7, 9\}$

$\cdot_{10}$	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

(#) Skup

$$U(15)=\{k\in\mathbb{N} \mid k<15,\ NZD(k,15)=1\}$$

formira grupu zajedno sa operacijom množenja modulo 15. Odrediti red grupe te odrediti red elemenata 1, 2, 7 i 11.

Rj.

$$U(15)=\{1,2,4,7,8,11,13,14\}$$

red grupe je 8

jedinični element je 1

red elementa 1 je 1, $|1|=1$

$2^2=2\cdot2=4$

$2^3=4\cdot2=8$

$2^4=8\cdot2=1$ red elementa 2 je 4, $|2|=4$

$7^1=7$

$7^2=$

$7^3=13$

$7^4=1$ red elementa 7 je 4, $|7|=4$

$11^1=11$

$11^2=1 \Rightarrow |11|=2$

(#) Napraviti Cayley-eve tabele za skup $\mathbb{Z}_5$ za operacije sabiranja i množenja modulo 5.

Rj.:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

(#) Data je grupa $\mathbb{Z}_{10}$ u odnosu na operaciju sabiranja modulo 10. Odrediti red grupe te odrediti red elemenata 0, 2, 5 i 7.

Rj.:

$\mathbb{Z}_{10} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$

Red grupe je 10

$0=0$

$0+0=0$, 0 je neutralni element grupe $\Rightarrow |0|=1$

$2+2=4$

$4+2=6$

$6+2=8$

$8+2=0 \Rightarrow |2|=5$

$5+5=0 \Rightarrow |5|=2$

$7+7=4$

$4+7=1$

$1+7=8$

$8+7=5$

$5+7=2$

$2+7=9$

$9+7=6$

$6+7=3$

$3+7=0 \Rightarrow |7|=10$

Definicija (podgrupa)

Ako je podskup H grupe G zatvoren u odnosu na binarnu operaciju od G i ako je H grupa u odnosu na tu operaciju grupe G, tada H nazivamo podgrupa od G. Pisaćemo $H \leq G$ ili $G \geq H$ da označimo da je H podgrupa od G, i $H < G$ ili $G > H$ će značiti da je $H \leq G$ ali $H \neq G$.

(#) Neka je G Abelova grupa u odnosu na operaciju množenja sa jediničnim elementom e. Pokazati da je $H=\{x^2 \mid x\in G\}$ podgrupa grupe G (primetimo da je H skup svih "kvadrata").

Rj: ZATVORENOST $(\forall x^2, y^2 \in H \quad x^2y^2 \in H)$

$$x^2, y^2 \in H \Rightarrow x^2y^2 = xxyy = xyxy = (\underbrace{xy}_{\in G})^2 \in H$$

H je zatvoren skup

ASOCIJATIVNOST $(\forall x^2, y^2, z^2 \in H \quad (x^2y^2)z^2 = x^2(y^2z^2))$

$$x^2, y^2, z^2 \in H \Rightarrow \text{kako } x^2, y^2, z^2 \in G \quad (x^2y^2)z^2 = x^2(y^2z^2)$$

NEUTRALNI ELEMENT $(\forall x^2 \in H \ \exists e \in H \quad x^2 \cdot e = e \cdot x^2 = x^2)$

$$e^2 = e \qquad \forall x^2 \in H \quad x^2 \cdot e^2 = x^2 \cdot e = x^2$$
$$e^2 \cdot x^2 = e \cdot x^2 = x^2$$

e je neutralni element za H

INVERZNI ELEMENT $(\forall x^2 \in H \ \exists x' \in H \text{ t.d. } x^2 \cdot x' = e = x' \cdot x^2)$

$x^2 \in H$

Kako je $x^{-1} \in G$ bo je $(x^{-1})^2 \in H$

$$x^2 \cdot (x^{-1})^2 = x\underbrace{xx^{-1}}_{e}x^{-1} = xx^{-1} = e$$

$(x^{-1})^2$ je inverz za $x^2 \in H$. Također $(x^{-1})^2 \in H$

H je podgrupa grupe G.

(#) Neka je G Abelova grupa sa jediničnim elementom e. Pokazati da je $H=\{x\in G \mid x^2=e\}$ podgrupa grupe G.

Rj.

ZATVORENOST $(\forall x,y\in H \ \ xy\in H)$

$x,y\in H \Rightarrow \begin{array}{l} x^2=e \\ y^2=e \end{array}$

$(xy)^2=(xy)(xy)=x(yx)y=x(xy)y=x^2\cdot y^2=e \Rightarrow (xy)^2=e$

$\Rightarrow xy\in H$ skup H je zatvoren

ASOCIJATIVNOST

$H\subseteq G \Rightarrow H$ je asocijativno

NEUTRALNI ELEMENT

$x\in H \quad \begin{array}{l} x\cdot e=x \\ e\cdot x=x \end{array}$ Da li je $e\in H$?

$e^2=e\cdot e=e \Rightarrow e\in H$

e je neutralni element

INVERZNI ELEMENT $(\forall x\in H \ \exists x'\in H \ \ xx'=e=x'x)$

Kako je $x^2=e$ tj. $x\cdot x=e$ $\forall x\in H$ inverz od x je sam x.

$\forall x\in H$ ima invert $x'=x$ $(x^{-1}=x)$.

H je podgrupa grupe G.

(#) Neka je G abelova grupa i neka se H sastoji od onih elemenata grupe G koji su konačnog reda. Dokazati da je H podgrupa grupe G.

Rj.

Trebamo pokazati da je H zatvoreno i asocijativno u odnosu na operaciju grupe G, te da ima jedinični element kao i da je svaki inverz elementa iz H također u H.

ASOCIJATIVNOST I NEUTRALNI ELEMENT

Kako je H podgrupa od G, samim time je zadovoljena osobina asocijativnosti. Također jedinica je reda 1, pa je $e \in H$. Pa nam je ostalo samo još da pokažemo da zatvorena u odnosu na množenje i da ima inverz.

ZATVORENOST $(\forall x,y \in H \; xy \in H)$

Neka su $x,y \in H$, i neka je $|x|=n$, $|y|=m$ za $n,m \in \mathbb{Z}$. Kako je G abelova, $(xy)^{nm} = x^{nm}y^{nm}$. Ali $x^{nm} = (x^n)^m = e^m$ i $y^{nm} = (y^m)^n = e^n$. Time $(xy)^{nm} = e$, pa je red od xy najviše nm, iz čega slijedi $xy \in H$. Prema tome H je zatvoreno u odnosu na množenje.

INVERZNI $(\forall x \in H \; \exists x^{-1} \in H \; xx^{-1} = e = x^{-1}x)$

Neka je $x \in H$ sa $|x|=n$. Tada $x^n = e$ pa ako pomnožimo obe strane sa x^{-n} dobićemo $e = x^{-n} = (x^{-1})^n$. Pa je red od x^{-1} najviše n. (U stvari, red je n, s obzirom da uvijek možemo obrnuti uloge od x i x^{-1}) Time $x^{-1} \in H$

Time smo pokazali da je H podgrupa grupe G.

Neka je R_{90} element grupe D_4 i neka je H najmanja moguća grupa koja sadrži R_{90}. Odrediti ostale elemente grupe H.

Rj: $R_{90} \in S$

Kako je H grupa to $R_{90} \cdot R_{90} \in H \Rightarrow R_{180} \in H$

$R_{180}, R_{90} \in H \Rightarrow R_{180} \cdot R_{90} \in H \Rightarrow R_{270} \in H$

$R_{270}, R_{90} \in H \Rightarrow R_{270} \cdot R_{90} \in H \Rightarrow R_0 \in H$

$\cdot$	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}
R_0	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}
R_{90}	R_{90}	R_{180}	R_{270}	R_0
R_{180}	R_{180}	R_{270}	R_0	R_{90}
R_{270}	R_{270}	R_0	R_{90}	R_{180}

$\Rightarrow H = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$

(#) Odrediti sve podgrupe grupe D_4.

R.j. Prvo ćemo odrediti najmanju podgrupu koja sadrži element R_0.
Poslije toga ćemo odrediti najmanju podgrupu koja sadrži R_{90}.
Poslije toga ćemo odrediti najmanju podgrupu koja sadrži R_{180}...

Ovaj proces ćemo nastaviti dok ne dođemo do najmanje podgrupe koja sadrži element D'.

Poslije toga ćemo odrediti najmanju podgrupu koja sadrži elemente R_0 i R_{90}...

Nastavićemo proces, ispitaćemo sve moguće kombinacije od dva elementa.

Poslije toga ćemo ispitati sve kombinacije od tri elementa...

$R_0 \in H_1 \Rightarrow R_0^2 \in H_1 \Rightarrow H_1 = \{R_0\}$

$R_{90} \in H_2 \Rightarrow R_{90}^2 \in H_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow H_2 = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$

$R_{180} \in H_3 \Rightarrow R_{180}^2 \in H_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow H_3 = \{R_0, R_{180}\}$

$R_{270} \in H_3 \Rightarrow R_{270}^2 \in H_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow H_3 = H_2$

$H \in H_4 \Rightarrow H^2 \in H_4 \Rightarrow H_4 = \{R_0, H\}$

$V \in H_5 \Rightarrow V^2 \in H_5 \Rightarrow H_5 = \{R_0, V\}$

$D \in H_6 \Rightarrow \dots \Rightarrow H_6 = \{R_0, D\}$

$D' \in H_7 \Rightarrow \dots \Rightarrow H_7 = \{R_0, D'\}$

To bi bile sve najmanje podgrupe koje sadrže jedan element. Da bi dobili nove podgrupe trebamo posmatrati najmanje podgrupe koje sadrže dva elementa. Dodavajući rotaciju rotacionoj podgrupi ne dobijamo ništa novo. Dodavajući bilo koji od H, V, D ili D' grupi $\{R_0, R_{90}, \dots, R_{270}\}$ dobićemo D_4.

Ali dodavajući H ili V grupi $\{R_0, R_{180}\}$ dobićemo

$$\{R_0, R_{180}, H, V\}$$

i slično dodavajući D ili D' grupi $\{R_0, R_{180}\}$ dobićemo

$$\{R_0, R_{180}, D, D'\}$$

Dodavajući nove elemente ovim grupama nećemo dobiti ništa novo

Podgrupe grupe D_4 su $\{R_0\}$, $\{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$, $\{R_0, R_{180}\}$, $\{R_0, H\}$, $\{R_0, V\}$, $\{R_0, D\}$, $\{R_0, D'\}$, $\{R_0, R_{180}, H, V\}$, $\{R_0, R_{180}, D, D'\}$.

(#) Odrediti sve podgrupe grupe $\mathbb{Z}_4$.

Rj

$\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

Dvije podgrupe svake grupe G su trivijalna grupa $\{0\}$ i sama grupa G.

Time dvije podgrupe od $\mathbb{Z}_4$ su $\{0\}$ i $\{0,1,2,3\}$.

Označimo sa G_1 najmanju podgrupu od $\mathbb{Z}_4$ koja sadrži element 1.

Tada $1 \in G_1 \Rightarrow 1+1 \in G_1$ tj. $2 \in G_1 \Rightarrow 2+1 \in G_1$ tj. $3 \in G_1$

$\Rightarrow 3+1 = 0 \in G_1 \Rightarrow G_1 = \mathbb{Z}_4$

Označimo sa G_2 najmanju podgrupu od $\mathbb{Z}_4$ koja sadrži element 2.

$2 \in G_2 \Rightarrow 2+2 = 0 \Rightarrow 0 \in G_2 \Rightarrow \underbrace{0+0}_{=0} \in G_2$

Time smo dobili da je $G_2 = \{0, 2\}$.

ZATVORENO ✓
ASOCIJATIVNO ✓
NEUTRALNI ✓
INVERZNI ✓

$\{0,2\}$ jest podgrupa

Označimo sa G_3 najmanju podgrupu od $\mathbb{Z}_4$ koja sadrži element 3.

$3 \in G_3 \Rightarrow 3+3 \in G_3$ tj. $2 \in G_3 \Rightarrow 2+2 \in G_3$ tj. $0 \in G_3$

$3, 2 \in G_3 \Rightarrow 2+3 \in G_3$ tj. $1 \in G_3 \Rightarrow G_3 = \mathbb{Z}$

Šta je sa najmanjim podgrupama koje sadrže kombinacije dva elementa

npr. za 1,2 imamo $\mathbb{Z}_4$, za 1,3 imamo $\mathbb{Z}_4$, za 2,3 imamo $\mathbb{Z}_4$,

Sve podgrupe grupe $\mathbb{Z}_4$ su $\{0\}$, $\{0,2\}$ i $\{0,1,2,3\}$.

(#) Odrediti sve podgrupe grupe $\mathbb{Z}_7$.

Rj. $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Odmah vidimo da su $\{0\}$ i $\mathbb{Z}_7$ podgrupe od $\mathbb{Z}_7$.

Označimo sa G_1 najmanju grupu koja sadrži element 1. Tada $1 \in G_1 \Rightarrow 1+1 \in G_1$ tj. $2 \in G_1 \Rightarrow 2+1 \in G_1$ tj. $3 \in G_1 \Rightarrow \dots$ $G_1 = \mathbb{Z}_7$

Označimo sa G_2 najmanju grupu koja sadrži element 2. Tada $2 \in G_2 \Rightarrow 2+2 \in G_2$ tj. $4 \in G_2 \Rightarrow 2+4 \in G_2$ tj. $6 \in G_2 \Rightarrow$ $6+2 \in G_2$ tj. $1 \in G_2 \Rightarrow G_2 = \mathbb{Z}_7$

Na isti način dobijemo da je najmanja podgrupa koja sadrži element 3 $\mathbb{Z}_7$.

Isto za element 4, element 5 i element 6.

Jedine podgrupe od $\mathbb{Z}_7$ su $\{0\}$ i $\mathbb{Z}_7$.

Ⓣ Odrediti sve podgrupe grupe $\mathbb{Z}_{12}$.

Rj.

Označimo sa G_1 najmanju podgrupu grupe $\mathbb{Z}_{12}$ koja sadrži element 1. Tada je $1+1 \in G_1$ tj. $2 \in G_1$

$\underbrace{2+1}_{=3} \in G_1$, $\underbrace{3+1}_{=4} \in G_1$, $\ldots$, $10+1 \in G_1$ tj $11 \in G_1$ $\Rightarrow$ $G_1 = \mathbb{Z}_{12}$

Slično dobijemo za elemente 5, 7 i 11 tj.
Najmanja podgrupa od $\mathbb{Z}_{12}$ koja sadrži element 1, ili element 5, ili element 7, ili element 11 je $\mathbb{Z}_{12}$.

Posmatrajmo element 2 - označimo sa G_2 najmanju podgrupu od $\mathbb{Z}_{12}$ koja sadrži element 2.

$2 \in G_2 \Rightarrow 2+2 \in G_2$ tj. $4 \in G_2 \Rightarrow 4+2 \in G_2$ tj. $6 \in G_2 \Rightarrow 6+2 \in G_2$
tj. $8 \in G_2 \overset{+2}{\Rightarrow} 10 \in G_2 \overset{+2}{\Rightarrow} 0 \in G_2$.

Time smo dobili skup $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

ZATVORENOST ✓
ASOCIJATIVNOST ✓
NEUTRALNI ✓
INVERZNI ✓

Skup $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ je podgrupa grupe $\mathbb{Z}_{12}$.

Slično posmatrajmo element 3 - neka je G_3 najm. podgr. sadrži 3

$3 \in G_3 \Rightarrow 6 \in G_3 \Rightarrow 9 \in G_3 \Rightarrow 0 \in G_3$

$6+6=0$
$6+9=3$

$9+3=0$
$9+6=3$
$9+9=6$

Dobili smo skup $\{0, 3, 6, 9\}$

ZATVORENOST ✓
ASOCIJATNNOST ✓
NEUTRALNI ✓
INVERZNI ✓

Grupa $\{0, 3, 6, 9\}$ je podgrupa grupe $\mathbb{Z}_{12}$.

Posmatrajmo element 4 - neka je G_4 najmanja podgrupa od $\mathbb{Z}_{12}$ koja sadrži element 4.

$4 \in G_4 \Rightarrow 8 \in G_4 \Rightarrow 0 \in G_4$

$+_{12}$	0	4	8
0	0	4	8
4	4	8	0
8	8	0	4

$\{0,4,8\}$

ZATVORENOST ✓
ASOCIJATIVNOST ✓
NEUTRALNI ✓
INVERZNI ✓

$\{0,4,8\}$ je podgrupa grupe $\mathbb{Z}_{12}$.

Posmatrajmo element 6 – neka je G_6 najmanja podgrupa grupe $\mathbb{Z}_{12}$ koja sadrži 6.

$6 \in G_6 \Rightarrow 6+6 \in G_6 \Rightarrow 0 \in G_6$

	0	6
0	0	6
6	6	0

$\{0,6\}$

ZATVORENOST ✓
ASOCIJATIVNOST ✓
NEUTRALNI ✓
INVERZNI ✓

$\{0,6\}$ je podgrupa grupe $\mathbb{Z}_{12}$.

Šta je sa elementom 8? $8+8=4 \Rightarrow \{0,4,8\}$ (G_4)

Element 9? $9+9=6$, $6+9=3 \Rightarrow \{0,3,6,9\}$ (G_3)

Element 10? $10+10=8$, $10+8=6$, $10+6=4$, $10+4=2 \Rightarrow \{0,2,4,6,8,10\}$ (G_2)

Šta je sa podgrupama koje sadrže sve kombinacije dva elementa

1 i 2, 1 i 3, 1 i 4, ..., 1 i 11 $\mathbb{Z}_{12}$;

2 i 3: $2+3=5 \Rightarrow \mathbb{Z}_{12}$;

2 i 4 G_2; 2 i 5 $\mathbb{Z}_{12}$; 2 i 6: G_2; 2 i 7 $\mathbb{Z}_{12}$; 2 i 8 G_2

2 i 9: $2+9=11$, $2+11=1$ $\mathbb{Z}_{12}$ ...

Sa svim mogućim kombinacijama od dva elementa ne dobijemo ni jednu novu podgrupu.

Podgrupe od $\mathbb{Z}_{12}$ su: $\{0\}$, $\{0,2,4,6,8,10\}$, $\{0,3,6,9\}$, $\{0,4,8\}$, $\{0,6\}$ i $\mathbb{Z}_{12}$.

(#) Neka je H konačan neprazan podskup grupe G. Pokazati da je H podgrupa grupe G ako i samo ako xy pripada skupu H kadgod x i y pripadaju H.

Rj: $H \subseteq G$, H konačan neprazan skup
H podgrupa od G $\Longleftrightarrow$ $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$

„$\Rightarrow$" Pretpostavimo da je H podgrupa grupe G. Tada je H zatvoreno u odnosu na operaciju množenja pa $\forall x, y \in H$ $xy \in H$.

„$\Leftarrow$" Pretpostavimo da xy pripada H kadgod x i y pripadaju H. Ovo znači da je H zatvoren u odnosu na datu operaciju grupe. A kako je H podskup od G, operacija je asocijativna. Time je ostalo još da pokažemo je jedinični element u H i da elementi od H imaju inverze koji su također u H.

Kako je H neprazan, možemo izabrati neki proizvoljan element x. Posmatrajmo skup $S = \{x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$. Prema pretpostavci čitav ovaj skup je u H (s obzirom da je svaki element skupa S oblika x pomnožen sa prethodnim elementom). Ovo znači da se neki elementi od S moraju ponoviti. Tj. postoje brojevi $i \neq j$ t.d. $x^i = x^j$. Množeći obe strane sa x^{-i} dobićemo jednakost $e = x^{j-i}$. Ali x^{i-j} je u S. Time, identitet je u H, i štaviše jedinični element je stepen od x. Napišimo $n = j-i$. Kako je $x^n = e$, tada $x \cdot x^{n-1} = e$. Pa je $x^{n-1} = x^{-1}$. S obzirom da je $x^{n-1} \in H$ inverz od x je u H. Kako je x izabran proizvoljno, svaki element iz H ima inverz. H je podgrupa od G.

Grupa	Operacija	Jedinica	Oblik elementa	Inverz	Abelova
$\mathbb{Z}$	sabiranje	0	k	$-k$	da
$\mathbb{Q}^+$	množenje	1	$m/n,\ m,n>0$	n/m	da
$\mathbb{Z}_n$	sabiranje modulo n	0	k	$n-k$	da
$\mathbb{R}^*$	množenje	1	x	$\frac{1}{x}$	da
$\mathbb{C}^*$	množenje	1	$a+ib$	$\frac{1}{a^2+b^2}a-\frac{1}{a^2-b^2}bi$	da
$GL(\mathbb{R})$	matrično množenje	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{d}{ad-bc}&\frac{-b}{ad-bc}\\\frac{-c}{ad-bc}&\frac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}$	ne
$U(n)$	množenje modulo n	1	$k,\ \underbrace{gcd}_{NZD}(k,n)=1$ najveći zajednički djelilac	rješenje x od $kx \bmod n = 1$	da
$\mathbb{R}^n$	sabiranje po elementu (po komponentama)	$(0,0,\dots,0)^T$	$(a_1,a_2,\dots,a_n)$	$(-a_1,-a_2,\dots,-a_n)$	da
$SL_2(\mathbb{R})$	matrično množenje	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ $ad-bc=1$	$\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$	ne
D_n	kompozicija	R_0	R_α, L	$R_{360-\alpha}, L$	ne